Formulación De Criterios Para El Diseño De Controladores Proporcionales

Eddy Orlando Mier Cornejo
Carrera de Ingeniería Mecatrónica, Escuela Militar de Ingeneira
La Paz, Bolivia
eddyomc@gmail.com

Formulation Of Criteria For The Design Of Proportional Controllers

Resumen - El presente artículo describe un análisis de la respuesta temporal de modelos sencillos de primer y segundo orden describiendo sus características, para desarrollar criterios de diseño de controladores proporcionales centrados en los modelos de segundo orden. El proceso de formulación es el de desarrollar formulas prácticas que permitan proponer condiciones básicas y reglas de construcción de controladores proporcionales para modelos superiores e iguales a los de segundo orden.

***Palabras Claves*—**
Controlador,
Modelo,
Respuesta temporal
Formulación,

Abstract - This article describes an analysis of the temporal response of simple first and second order models, describing their characteristics, to develop design criteria for proportional controllers centered on second order models. The formulation process is to develop practical formulas that allow proposing basic conditions and construction rules for proportional controllers for models greater than and equal to those of second order.

Keywords—
Controller,
Model,
temporary response
Formulation,

I. INTRODUCCION

Que son sistemas de control, la regulación automática, los sistemas realimentados. ¿es electrónica? ¿para qué sirven? Son preguntas frecuentes entre estudiantes de ingeniería.

Bennet (1996) dice que nombres como control o automática no han calado en el público, mientras que otros relacionados, como cibernética o robótica, obtienen mucho más reconocimiento y comprensión aparente. La palabra control es especialmente ambigua, porque se usa en contextos en el que poco tienen que ver.

Un artículo de Samad (2009) describe esta situación, resumida en el título: «Entonces, ¿qué es de verdad la ingeniería de control?». Ofrece como explicación que el control como producto es a la vez intangible y omnipresente. La ingeniería de control está por todas partes, pero escondida, hay que añadir además que es una tecnología que apoya a otras, facilitando la solución de problemas; Åström(1999). En la historia de la tecnología hay un hilo invisible que ha tenido un efecto profundo en las distintas olas del progreso.

¿Por qué debo conocerlo?:

- Porque están presentes en muchísimas aplicaciones tecnológicas.
- Porque prestan una contribución esencial a muchas de ellas.
- Porque se relacionan con todas las especialidades de la ingeniería y con las matemáticas.
- Porque trascienden la ingeniería hacia la ciencia.
- Porque sirven para comprender mecanismos de la naturaleza y de la humanidad, en otras disciplinas científicas como la biología, la psicología o la economía.

II. PLANTEAMIENTO

Un controlador proporcional, es un mecanismo de control que a través de un lazo de retroalimentación permite regular la velocidad, temperatura, presión y flujo entre otras variables de un proceso en general. El controlador calcula la diferencia entre nuestra variable real contra la variable deseada.

LA CAJA DE HERRAMIENTAS DEL INGENIERO DE CONTROL

En primer lugar, el modelado: cómo obtener modelos matemáticos de los sistemas que se controlan y de los reguladores. Estos modelos deben permitir el estudio de asuntos cruciales, como la estabilidad, y por tanto deben reflejar la evolución en el tiempo: modelos dinámicos, frecuentemente en forma de ecuaciones diferenciales

Los diagramas de bloques permiten modelar de forma gráfica y obtener descripciones complejas a partir de la conexión de modelos sencillos

El modelo, como representación matemática puede estudiar la respuesta dinámica (en el tiempo) y la estabilidad. La herramienta básica es la función de transferencia, que es la ecuación diferencial transformada en cociente de polinomios. Permite calcular y extraer información de las respuestas en el tiempo y en la frecuencia

La respuesta temporal o transitoria es cómo se llega al régimen permanente y la caracteriza la Rapidez y el Amortiguamiento

Los modelos sencillos son los más utilizados, estos modelos son: Sistema de primer orden y sistema de segundo orden

Sistema de primer orden,
por definición su función de transferencia es:

$$F(s)=\frac{Y(s)}{U(s)} \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{s+a}=\frac{1}{1+s\tau} \qquad \tau=\frac{1}{a}$$

Se deduce las siguientes Condiciones

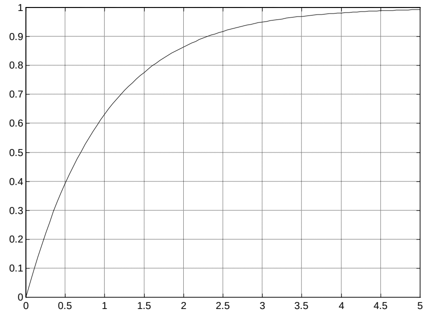
- ⇨ Estable, $a>0, \tau>0$
- ⇨ Sin ceros
- ⇨ Normalizado, $F(0)=1$

Respuesta a un escalón

$$u(t)=u_0(t), \quad U(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=F(s)U(s)=\frac{a}{s(s+a)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s+a)}$$

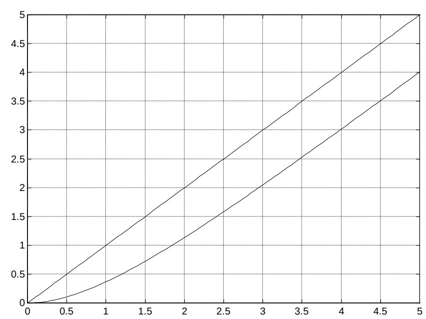
$$y(t)=1-e^{-at}=1-e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Respuesta a una rampa

$$u(t)=t\cdot u_0(t), \quad U(s)=\frac{1}{s^2} \quad Y(s)=\frac{a}{s^2(s+a)}$$

$$y(t)=t-\tau(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$



Sistema de segundo orden

$$F(s) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

Condiciones

Estable, $\omega_n>0, \zeta>0$.

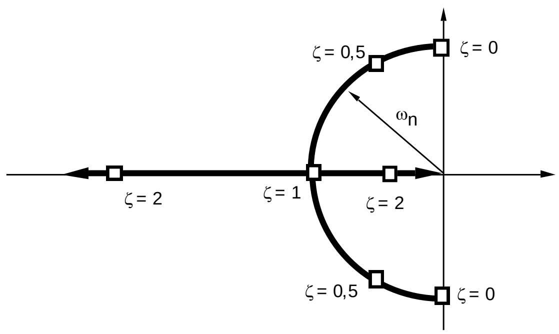
Oscilante, $\zeta=0$.

Sin ceros

Polos y Respuestas;

Visión General

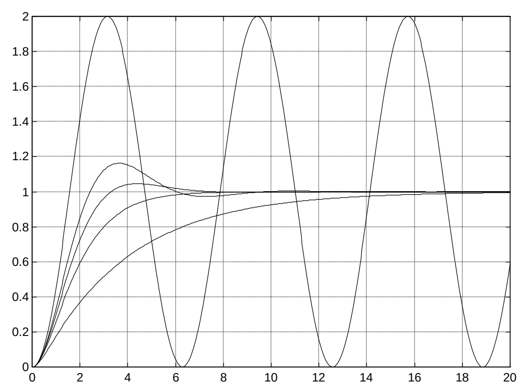
Polos: $s = \omega_n\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$



Propiedades de la respuesta:

Sistemas con igual ζ, distinta ω_n, cambia sólo la escala de tiempos. La rapidez es mayor si ω_n aumenta. Tipos de respuestas:

$\zeta > 1$	Sobreamortiguado
$\zeta = 1$	Amortiguamiento crítico
$0 < \zeta < 1$	Subamortiguado
$\zeta = 0$	Oscilante
$\zeta < 0$	Inestable



Respuesta a un escalón para $\zeta \geq 1$.

$\zeta > 1$ Sobreamortiguado

Polos: $-a_1, -a_2 = -\omega_n\left(\zeta \mp \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$

Respuesta:

$$y(t) = 1 - \frac{a_2}{a_2 - a_1} e^{-a_1 t} + \frac{a_1}{a_2 - a_1} e^{-a_2 t}$$

$\zeta = 1$ Amortiguamiento crítico

Polos: $-a_1 = -a_2 = -a = -\omega_n$

Respuesta: $y(t) = 1 - e^{-at} + at e^{-at}$

Rapidez

$t_s = t_{s,5\%}$, Hay que determinarlo numéricamente

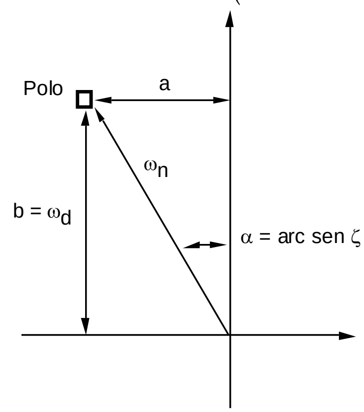
$t_s \approx 5/a$ si $\zeta = 1$

Si $-a_1 >> -a_2$, $a_2 >> a_1$:

$$y(t) = 1 - \frac{a_2}{a_2 - a_1} e^{-a_1 t} + \frac{a_1}{a_2 - a_1} e^{-a_2 t} \approx 1 - e^{-a_1 t}$$

Respuesta a un escalón para $\zeta < 1$.

Polos: $s = -a \pm jb = -\omega_n\left(\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2}\right)$



Respuesta: $y(t) = 1 - \dfrac{1}{\cos\alpha} e^{-at} \cos(bt - \alpha)$

Amortiguamiento

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad t_p = \frac{\pi}{b}$$

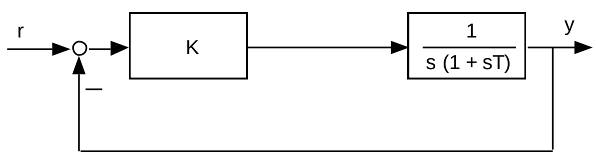
$$M_p = R_p = e^{-\pi \operatorname{tg} \alpha}$$

Sistemas de Control y Modelos

Para muchos **sistemas** reales pueden usarse **modelos** de primer y segundo orden.

Típicamente se desprecian constantes de tiempo pequeñas del lazo abierto.

El Sistema de Segundo Orden *como Modelo de un Sistema de Control*



La ganancia K (control proporcional) es ajustable.

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{K}{s(1+sT)}}{1 + \dfrac{K}{s(1+sT)}} = \frac{K}{K + s + Ts^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}$$

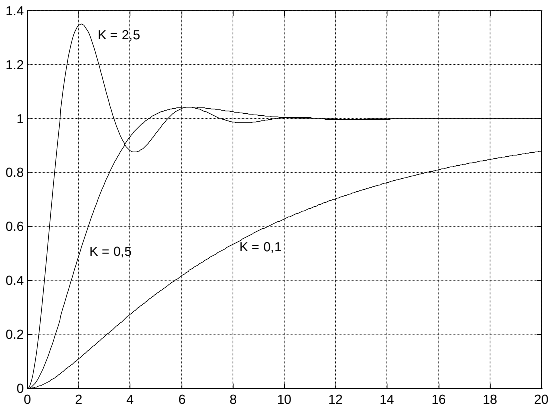
Con T dado:

Estable para todo K,

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}} \propto \frac{1}{\sqrt{K}}$$

La rapidez, depende del parámetro que se use para definirla. P.e., el t_s mínimo no es para $\zeta = 0{,}7$.

Si se fija $M_p(\zeta)$, la rapidez y la precisión vienen ya determinadas.



Respuesta a escalón en consigna con T = 1

Las constantes de tiempo despreciadas Especificaciones de la Respuesta Temporal

El estudio anterior era para sistemas de segundo orden.

La respuesta de un sistema es similar si el sistema tiene una par de polos dominantes.

Para sistemas en general puede darse especificaciones de respuesta temporal en el diseño.

	Parámetros	Polos	Respuesta a un escalón
Amortiguamiento	ζ	α	Mp
Valores típicos	0,5 0,7	30º, 45º	15%, 5%
Rapidez (salvo t_s supone comparar sistemas con similar amortiguamiento)	ω_n	a, b = ω_d, ω_n, t_τ	t_a, t_p, t_s
Aplicabilidad	2º orden	Con 2 polos dominantes	Sistemas en general (no usar fórmulas de 2º orden)

III. FORMULACION DE CRITERIOS

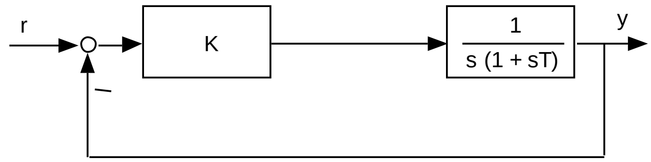
Lugar de las raíces, Trayectoria, en el plano complejo, de los polos del lazo cerrado $F(s)$ en función de un parámetro η.

Factorización particular del lazo abierto:

η	Parámetro o "ganancia"
z_i	Ceros del lazo abierto, m ceros.
p_i	Polos del lazo abierto, n polos.

$$G(s)H(s) = \eta \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

(1) Ejemplo (el sistema de segundo orden como modelo)

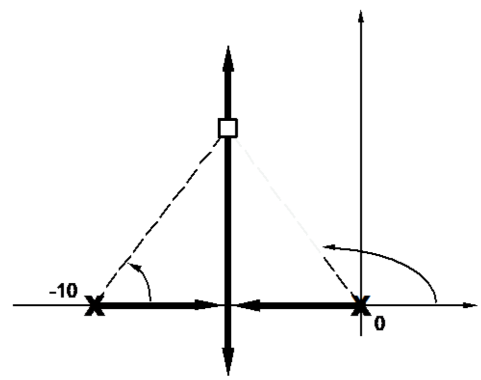


$T = 0{,}1$ $$G(s)H(s) = \frac{K}{s(1+0{,}1s)} = \eta\frac{1}{s(s+10)}$$

$\eta = 10K$

- Puede obtenerse de forma analítica:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad \rightarrow \quad s(s+10) + \eta = 0 \quad \rightarrow \quad s = -5 \pm \sqrt{25 - \eta}$$



Condiciones Básicas y Reglas de Construcción

Ecuación característica:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Forma polinómica:

$$\prod_{i=1}^{n}(s - p_i) + \eta\prod_{i=1}^{m}(s - z_i) = 0$$

De ésta se deduce que:

El número de raíces (polos de lazo cerrado) es max $\{m , n\}$

Para η = 0 hay n raíces que coinciden con los polos de lazo abierto.

Para $\eta = \infty$ hay m raíces que coinciden con los ceros de lazo abierto.

Reglas para $n \geq m$, $\eta \geq 0$

Otra forma de la ecuación característica:

$$G(s)H(s) = \eta \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = -1$$

Condición argumental: Permite saber si un punto ***s*** pertenece al lugar de las raíces:

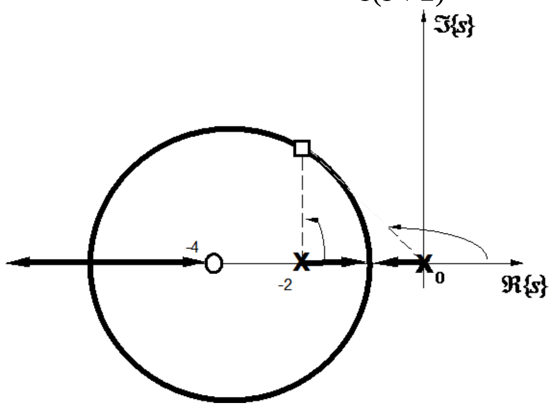
$$\sum_{i=1}^{n}\arg\{s-p_i\} - \sum_{i=1}^{m}\arg\{s-z_i\} = (2q+1)\pi \qquad q \in \mathbf{Z}$$

Condición modular: Permite obtener el valor del parámetro η, conocido s:

$$\eta = \frac{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|}$$

Ejemplo (condiciones argumentales y modular)

$$G(s)H(s) = \eta\frac{s+4}{s(s+2)}$$



Condición argumental: El punto $s = -2 + j2$ pertenece al lugar:

$$\arg\{s\} + \arg\{s+2\} - \arg\{s+4\} = 135^o + 90^o - 45^o = 180^o$$

Condición modular:

$$\eta = \frac{|s|\cdot|s+2|}{|s+4|} = \frac{2\sqrt{2}\cdot 2}{2\sqrt{2}} = 2$$

Reglas del lugar de las raíces *(*$n \geq m$ *,* $\eta \geq 0$*)*

1 **Simetría**: El lugar es simétrico respecto del eje real, ya que las raíces son reales o complejas conjugadas.

2 **Ramas** (forma polinómica):

$$\prod_{i=1}^{n}(s-p_i) + \eta\prod_{i=1}^{m}(s-z_i) = 0$$

Hay n ramas que parten de los p_i para $\eta = 0$.
Hay m ramas que parten de los z_i para $\eta = \infty$.
Hay $(n - m)$ ramas que van a ∞ (regla 4).

3 **Eje real**: Cond. argum.

$$\sum_{i=1}^{n}\arg\{s-p_i\} - \sum_{i=1}^{m}\arg\{s-z_i\} = (2q+1)\pi$$

Pertenecen los tramos que dejan a su derecha un número impar de polos + ceros.

4 **Asíntotas**: Cond. argumental, para $s \longrightarrow \infty$,

$$\sum_{i=1}^{n}\arg\{s-p_i\} - \sum_{i=1}^{m}\arg\{s-z_i\} = n\phi_A - m\phi_A = (2q+1)\pi$$

$$\rightarrow \quad \phi_A = \frac{(2q+1)\pi}{n-m}$$

Se cortan en:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

Para $(n-m) = 0$, no hay. $(n-m) = 1$, $\phi_A = 180^o$. $(n-m) = 2$, $\phi_A = \pm 90^o$. $(n-m) = 3$, $\phi_A = 180^o, \pm 60^o$.

Puntos de salida (entrada) del eje real:
El punto de salida (entrada) de una rama del eje real entre dos polos (ceros) es un máximo (mínimo) del parámetro η sobre el este eje.

Ángulo de salida (entrada) de polos (ceros):
Aplicar la cond. arg. en un punto infinitesimalmente próximo.

b) *6.2.2 Relajación de restricciones*
(1) Reglas *(*$\eta < 0$*)*

Condición argumental:

$$\sum_{i=1}^{n}\arg\{s-p_i\} - \sum_{i=1}^{m}\arg\{s-z_i\} = 2q\pi \qquad q \in \mathbf{Z}$$

Condición modular: Da el módulo del parámetro.

Cambian las reglas que tienen que ver con la condición argumental:

3 Eje real: Pertenecen los tramos que dejan a su izquierda un número impar de polos + ceros.

4 Asíntotas:

$$\phi_A = \frac{2q\pi}{n-m}$$

(No se cortan en A). $\phi_A = 0$ es siempre la primera.

Reglas *(*n < m*)*

$$\eta \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = -1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\eta}\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)} = -1$$

Las ramas van de polos a ceros en cualquier caso.

Reglas *(*Otros parámetros*)*

Se aplican las técnicas si se consigue una factorización similar.

Ejemplo: Conocido K

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(1+Ts)} = -1$$

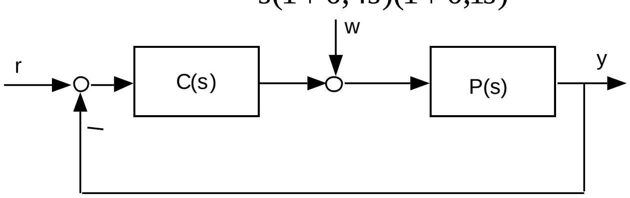
$$\eta = T$$

$$K + s(1+Ts) = 0 \quad \rightarrow \quad K + s + Ts^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + T\frac{s^2}{s+K} = 0$$

IV. EJEMPLO

Se tiene una planta cuya función de transferencia es:

$$P(s) = \frac{1}{s(1+0{,}4s)(1+0{,}1s)}$$



Control proporcional C(s) = K

$$G(s) = K\frac{1}{s(1+0{,}4s)(1+0{,}1s)} = \eta\frac{1}{s(s+2{,}5)(s+10)} \qquad \eta = 25K$$

Dibujar el lugar de las raíces

Polos de lazo abierto:

$s = 0$, $s = -2{,}5$, $s = -10$.

Ceros de lazo abierto: no hay**.**

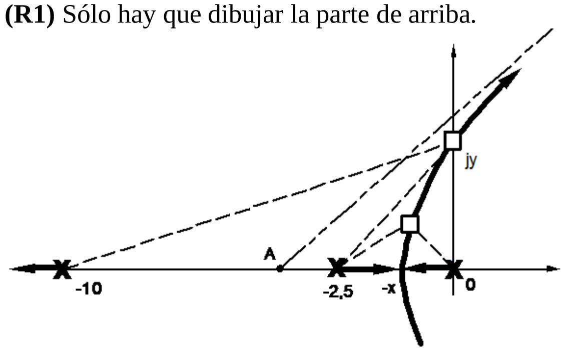
Condición argumental:

$$\arg\{s\} + \arg\{s+2{,}5\} + \arg\{s+10\} = 180^o$$

Condición modular:

$$\eta = |s| \cdot |s+2{,}5| \cdot |s+10|$$

(R1) Sólo hay que dibujar la parte de arriba.



(R2) Tres ramas, que salen de los tres polos.

(R3) Eje real

(R4) Asíntotas

$$\phi_A = \frac{(2q+1)180^o}{n-m} = \frac{(2q+1)180^o}{3-0} = -60^o, 60^o, 180^o,$$

$$q = -1,\ 0,\ 1$$

(R5) Punto de salida del eje real: amortiguamiento crítico, $\zeta = 1$

$$x_s = \arg\max\{x(2{,}5-x)(10-x)\} = 1{,}162$$

$$\eta_s = 13{,}74$$

Corte con el eje imaginario: Limite de estabilidad, pulsación de oscilación

$$90^o + \mathrm{arctg}\frac{y}{2{,}5} + \mathrm{arctg}\frac{y}{10} = 180^o$$

$$\omega_u = y = 5$$

$$\eta_u = 5\sqrt{5^2+2{,}5^2}\sqrt{5^2+10^2} = 312{,}5$$

$$K_u = 12{,}5$$

Diseñar un control proporcional

Diseño para $\zeta = 0{,}5$, intersección de una línea a 30º con el eje imaginario con el lugar

$$120^{o} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{2{,}5 - x} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{10 - x} = 180^{o}$$

$$x = 1$$

$$\varsigma\eta = 2\sqrt{3x^2 + (2{,}5 - x)^2}\,\sqrt{3x^2 + (10 - x)^2} = 42$$

$$K = 1{,}68$$

Margen de ganancia para $\zeta = 0{,}5$

$$M_g = \frac{K_u}{K} = \frac{\eta_u}{\eta} = 7{,}44$$

IX. CONCLUSIÓN

Las fórmulas desarrolladas en la solución del ejemplo permiten un análisis matemático exacto para la obtención de los parámetros de control proporcional utilizando herramientas del cálculo matemático y la geometría analítica. Se utilizo las mismas en una serie de modelos de planta donde los resultados entregados cumplen el rigor propuesto en el artículo.

REFERENCES

[1] F.L. Pagola, "Apuntes de Regulación automática", Universidad Pontificia Comillas, 1994.

[2] R. C. Dorf, "Sistemas modernos de control", 2ª edición en español, Addison-Wesley Iberoamericana, 1989. Texto muy usado, con muchísimas ediciones americanas. Bonito y motivador.

[3] G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini, "Control de sistemas dinámicos con retroalimentación", Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.

[4] Cuidado con la terminología, que es muy mala, debido a una "traducción por parecido" de los términos técnicos del inglés. Por ejemplo, dice torsión en vez de par (inglés, torque).

a. *L. Phillips, H. T. Nagle, "Sistemas de Control Digital: Análisis y Diseño", G. Gili, 1987.*

[5] Buena introducción a todos los temas, aunque con algunos errores de bulto. Trata detalladamente temas de implantación: aunque con tecnología ya anticuada, las ideas son muy útiles.

[6] G. F. Franklin, J. D. Powell, M. L. Workman " Digital Control of Dynamic Systems", 2nd Edition. Addison-Wesley, 1992.

[7] Mejor y más avanzado. Me gustaba más la edición anterior, más breve.

[8] K. J. Åström, B. Wittenmark, "Computer Controlled Systems", 2nd Edition, Prentice-Hall, 1997.

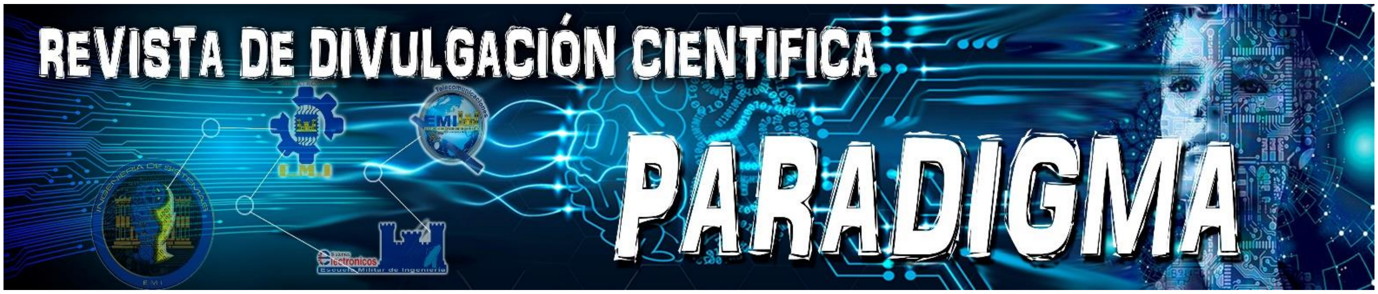
[9] Temas avanzados bien tratados. Libro difícil para principiantes.

[10] K. Dutton, S. Thompson, B. Barraclough, "The Art of Control Engineering", Addison-Wesley, 1997.

[11] Cubre muchos temas de control, comenzando por un nivel muy básico y llegando a buenas introducciones de temas avanzados. Cuida de que las matemáticas no sean excesivas.

Biografía del Autor

Eddy Orlando Mier Cornejo, Nació en Potosí-Bolivia, Ingeniero Electrónico de la Universidad Mayor de San Andrés. Posee varios postgrados y cursos de actualización, tiene más de 25 años de experiencia en desarrollo de sistemas embebidos mediante procesos de reciclaje, sistemas de adquisición de datos, diseño e implementación de reguladores automáticos, programación de PLDs, FPGAs mediante tecnología VHDL, Actualmente es docente de las materias de Hardware reconfigurable, Sistemas de control y automatización en las carreras de Ingeniería de sistemas, Ingeniería Mecatrónica, trabajo en proyectos de investigación relacionadas a las materias que imparte en la Escuela Militar de Ingeniería.


REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTIFICA
PARADIGMA