Articulo Original Página: 27 - 31 ISSN
Paradigma Volumen XXIV Abril 2022

AJUSTE MÍNIMO CUADRÁTICO EN LA TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS AFÍN EN EL ESPACIO BIDIMENSIONAL

Carlos Valenti Garcia
Carrera de Ingeniería de Sistemas, Escuela Militar de Ingeniería
La Paz, Bolivia
carlos_valentig@hotmail.com

LEAST SQUARE ADJUSTMENT IN TWO-DIMENSIONAL AFFINE COORDINATE TRANSFORMATION

Resumen - En el documento se aplica un modelo matemático-estocástico para el ajuste mínimo cuadrático de la transformación de coordenadas Afín en el espacio bidimensional.

***Palabras Claves*—** Ajuste mínimo cuadrático de la Transformación de coordenadas Afín, en el espacio bidimensional.

Abstract - The paper a mathematical-stochastic model is apply for the least square adjustment of the Affine coordinate transformation in two-dimensional space.

Keywords— Least squares adjustment of the Affine coordinate transformation, in two-dimensional space.

I. INTRODUCCION

1. Descripción general

Un problema frecuente en la fotogrametría y el tratamiento de imágenes es la conversión de coordenadas rectangulares de un sistema a otro. Para la localización adecuada de estos puntos en sistemas diferentes, se requieren de procedimientos de transformación de coordenadas rectangulares entre distintos sistemas de referencia.

En la fotogrametría, comúnmente se determinan las coordenadas de puntos desconocidos en un sistema de coordenadas rectangulares arbitrario. Estas coordenadas, deben transformarse a un sistema de coordenadas calibradas, empleadas para otras actividades posteriores.

Estos procedimientos son denominados transformación de coordenadas, los cuales requieren de algunos puntos conocidos en ambos sistemas, llamados puntos de control.

2. Antecedentes

La transformación de coordenadas es un procedimiento de cambio de coordenadas aplicando relaciones matemáticas determinadas para cada requerimiento. En la fotogrametría, usualmente se requieren de procesos de transformación de coordenadas que preserven el paralelismo de las líneas, pero no necesariamente las distancias y los ángulos, llamado ***Transformación Afín,*** generalmente en $\Re^2$ y $\Re^3$.

Para los procedimientos rigurosos de transformación, usualmente se requieren al menos dos puntos o tres puntos de control en $\Re^2$ o $\Re^3$, respectivamente. La redundancia de puntos de control permite que la transformación se efectúe a partir de procedimientos mínimo-cuadráticos que minimice la suma de los desvíos al cuadrado.

II. OBJETIVO GENERAL

Aplicar el modelo matemático – estocástico en $\Re^2$, para la transformación de coordenadas Afín en dos sistemas de referencia diferentes y ajustar los mismos por procedimientos mínimo-cuadráticos.

III. Transformación Lineal Afín en $\Re^2$

El término bidimensional significa que el sistema de coordenadas descansa sobre la superficie de un plano. Afín implica que se preserva el paralelismo de las líneas, pero no las distancias y los ángulos en la transformación. Para el procedimiento de la transformación es necesario conocer las coordenadas de al menos dos puntos separados en los dos sistemas de coordenadas: en el sistema original y el sistema final de coordenadas. Si para la transformación se emplean más de dos puntos de control, la solución del problema puede ser obtenida aplicando procedimientos mínimo-cuadráticos.

IV. PROBLEMA

El punto P medido en el sistema (x'y') no ortogonal, se quiere transformar al sistema de coordenadas (XY), empleando la transformación Afín bidimensional.

V. EL MODELO MATEMATICO - ESTOCÁSTICO

1. RELACIONES GEOMÉTRICAS

La transformación de las coordenadas del punto P en $\Re^2$ del sistema de coordenadas (x'y') no ortogonal al sistema de coordenadas (XY), se efectúa en tres etapas: la primera la transformación de las coordenadas del punto P medidas en el sistema (x'y') al sistema de coordenadas (xy), la segunda la rotación de las coordenadas del punto P del sistema (xy) al sistema (X'Y') y la tercera la traslación de las coordenadas del punto P del sistema (X'Y') al sistema de coordenadas (XY), como se muestra en la figura 1 [3].

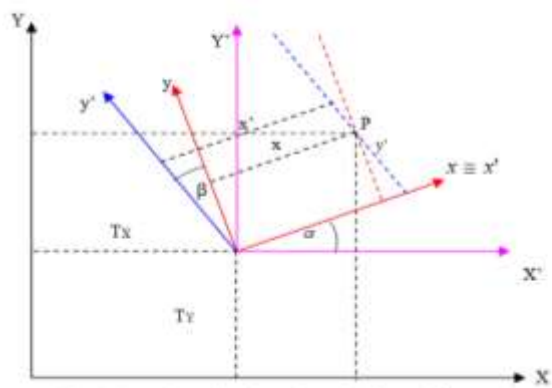

Fig. 1. Transformación de coordenadas Afín en $\Re^2$

Donde:

X, Y : Sistema de coordenadas de referencia
x',y' : Sistema arbitrario de coordenadas no ortogonal
x, y : Sistema arbitrario de coordenadas ortogonal
β : Angulo falta de perpendicularidad entre los ejes x', y'
α : Angulo de rotación entre los sistemas (x, y) y (X', Y')
λ_x : Factor de escala en la dirección de las abscisas
λ_y : Factor de escala en la dirección de las ordenadas
Tx : Traslación en x
Ty : Traslación en y

2. MODELO MATEMÁTICO

Aplicando la transformación a fín bidimensional (Fig. 2), incluyendo los factores de escala (en las direcciones de los ejes de las abscisas y ordenadas) y la falta de ortogonalidad entres sus ejes, se pueden encontrar las siguientes relaciones [3]:

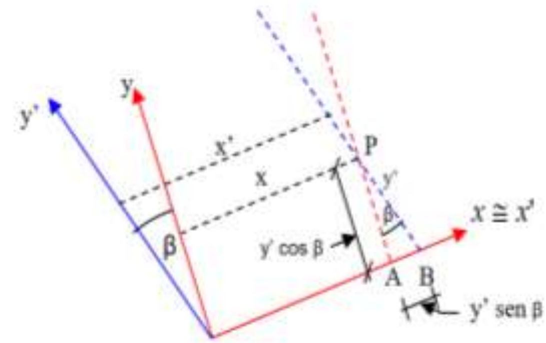

Fig. 2. Transformación de coordenadas de (x'y') a (xy)

En el Δ APB:

$$sen\beta = \frac{\overline{AB}}{y'} \Rightarrow \overline{AB} = y' sen\beta \qquad (1)$$

$$cos\,\beta = \frac{\overline{PA}}{y'} \Rightarrow \overline{PA} = y' cos\,\beta \qquad (2)$$

Las coordenadas en el sistema (x y):

$$x = x' - y' sen\beta \qquad (3)$$

$$y = y' \cos\beta \qquad (4)$$

Aplicando factores de escala:

$$x = \lambda_x \cdot x' - \lambda y \cdot y' sen\beta \qquad (5)$$

$$y = \lambda_y \cdot y' \cos\beta \qquad (6)$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} 1 & -sen\beta \\ 0 & cos\,\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x x' \\ \lambda_y y' \end{bmatrix}_P \qquad (7)$$

Donde las coordenadas del punto P están determinadas en el sistema arbitrario (xy) ortogonal.

De las relaciones trigonométricas de la figura 3, se obtienen las siguientes relaciones:

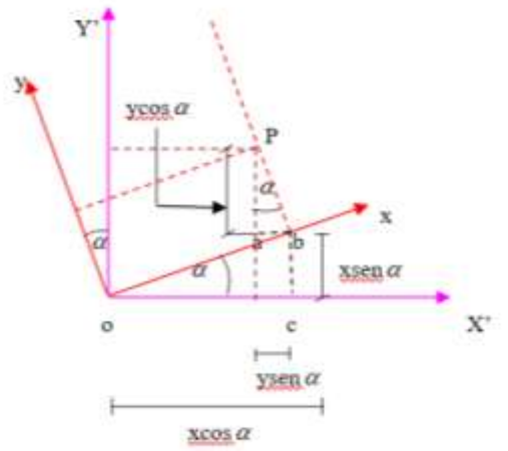

Fig. 3. Transformación de coordenadas de (xy) a (X'Y')

En el Δ aPb:

$$sen\alpha = \frac{\overline{ab}}{y} \Rightarrow \overline{ab} = ysen\alpha \qquad (8)$$

$$cos\alpha = \frac{\overline{Pa}}{y} \Rightarrow \overline{Pa} = ycos\alpha \qquad (9)$$

En el Δ obc:

$$sen\alpha = \frac{\overline{bc}}{x} \Rightarrow \overline{bc} = xsen\alpha \qquad (10)$$

$$cos\alpha = \frac{\overline{oc}}{x} \Rightarrow \overline{oc} = xcos\alpha \qquad (11)$$

Las coordenadas en el sistema (X'Y'):

$$X' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot sen\alpha \qquad (12)$$

$$Y' = x \cdot sen\alpha + y \cdot \cos\alpha \qquad (13)$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_P \qquad (14)$$

Remplazando la ecuación (7) en (14):

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -sen\beta \\ 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x x' \\ \lambda_y y' \end{bmatrix}_P \qquad (15)$$

Multiplicando (15):

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} \cos\alpha & (-\cos\alpha\, sen\beta - sen\alpha \cos\beta) \\ sen\alpha & (-sen\alpha sen\beta + \cos\alpha \cos\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x x' \\ \lambda_y y' \end{bmatrix}_P \qquad (16)$$

La traslación del Punto P se muestra en la figura 4.

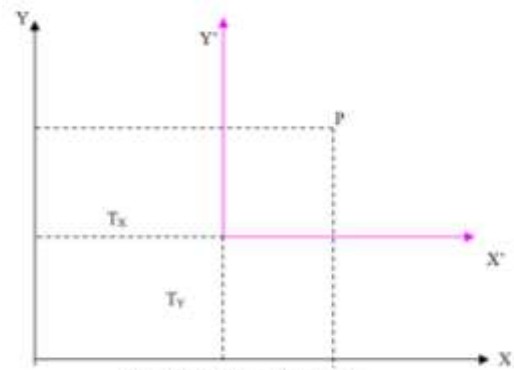

Fig. 4. Traslación de coordenadas

Luego la relación entre el sistema de referencia y el sistema X,Y está determinado por:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix}_P + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}_P \qquad (17)$$

Remplazando (16) en (17):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -sen\beta \\ 0 & \cos\beta \end{bmatrix}_P \begin{bmatrix} \lambda_x x' \\ \lambda_y y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} \qquad (18)$$

Multiplicando (18):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} \cos\alpha & (-\cos\alpha\, sen\beta - sen\alpha \cos\beta) \\ sen\alpha & (-sen\alpha sen\beta + \cos\alpha \cos\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x x' \\ \lambda_y y' \end{bmatrix}_P + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} \qquad (19)$$

Si:

$$\begin{aligned} a_1 &= T_x \\ a_2 &= \lambda_x \cos\alpha \\ a_3 &= \lambda_y(-\cos\alpha\, sen\beta - sen\alpha \cos\beta) \\ b_1 &= T_y \\ b_2 &= \lambda_x sen\alpha \\ b_3 &= \lambda_y(-sen\alpha sen\beta + \cos\alpha \cos\beta) \end{aligned}$$

Entonces:

$$X_P = a_1 + a_2 x'_P + a_3 y'_P \qquad (20)$$

$$Y_P = b_1 + b_2 x'_P + b_3 y'_P \qquad (21)$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1' & y_1' \\ 1 & x_2' & y_2' \\ .. & \dots & \dots \\ .. & \dots & \dots \\ 1 & x_n' & y_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad (22)$$

Simbólicamente:

$$X = xA \qquad (23)$$

De manera similar:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1' & y_1' \\ 1 & x_2' & y_2' \\ .. & \dots & \dots \\ .. & \dots & \dots \\ 1 & x_n' & y_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad (24)$$

Simbólicamente:

$$Y = yB \qquad (25)$$

Donde:

X,Y : vectores de coordenadas calibradas
x ,y : matrices de coordenadas arbitrarias
A, B : Vectores de los parámetros de transformación

3. Modelo estocástico

La determinación de los seis parámetros de transformación en forma simultánea, uniendo (22) y (24) e introduciendo los términos de perturbación v, se puede expresar por el siguiente sistema en notación matricial [3]:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \dots \\ \dots \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1' & y_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1' & y_1' \\ 1 & x_2' & y_2' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2' & y_2' \\ .. & \dots & \dots & .. & \dots & \dots \\ .. & \dots & \dots & .. & \dots & \dots \\ 1 & x_n' & y_n' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_n' & y_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ \dots \\ \dots \\ v_{xn} \\ v_{yn} \end{bmatrix} \qquad (26)$$

Donde:

Y : vector de coordenadas calibradas
x : matriz de coordenadas arbitrarias
A : Vector de los parámetros de transformación
v : Vector de residuals

4. Determinación de los parámetros ajustados

Simbólicamente (26) se puede escribir como:

$$Y = xA + v \qquad (27)$$

Donde:

$$\hat{A} = (x^t x)^{-1}(x^t Y) \qquad (28)$$

5. Vector de residuales

El modelo mínimo cuadrático a partir del cual se determinan los seis parámetros de transformación de las coordenadas medidas en un sistema arbitrario x', y' (sistema digital) al sistema X,Y (coordenadas calibradas) están determinadas por:

$$Y = xA + v \qquad (29)$$

Entonces:

$$v = Y - xA \qquad (30)$$

Precisión de la transformación

Un indicador de la precisión de la transformación es el denominado error cuadrático medio, definido por la expresión:

$$\sigma_{xy} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(v_{Xi}^2 + v_{Yi}^2)}{l - m}} \qquad (31)$$

Donde:

N : Número de puntos que intervienen en el ajuste
l : Número de ecuaciones que intervienen en el proceso de ajuste (l = 2n)
M : Número de observación mínimas que se necesitan para resolver los parámetros (m= 4)

VI. Aplicación

Los datos de la tabla 1 muestran las coordenadas calibradas de una imagen y las coordenadas medidas en un sistema de coordenadas arbitrario, a partir de los cuales se ha estimado las coordenadas calibradas de los puntos faltantes que se muestran en la tabla 2.

Tabla 1. TRANSFORMACION DE COORDENADAS AFFINE

Punto	Coord. Calibradas		Coord. Arbitrarias	
	x	y	x	y
F1	-11304,00	-11296,30	23278,88	674,88
F3	11302,80	11306,50	638,88	23240,38
F2	-11296,80	11302,40	23234,13	23271,13
F4	11294,30	-11294,80	682,13	642,88
1			4976,21	5221,63
2			7836,85	21321,95
3			19543,05	18743,76
4			22343,87	6221,33

Tabla 2. Coordenadas calibradas estimadas

Parámetros		Coord. Calibradas	
estimados	Punto	x	y
11978,242	1	6993,04	-6721,58
-1,0001283	2	4132,03	9376,59
-0,0016000	3	-7597,31	6780,34
-11936,392	4	-10378,45	-5748,02
-0,0015126			
1,0001353	σ_{xy}	0,78	

VII. CONCLUSIONES

El modelo de transformación de coordenadas Afín en $\Re^2$, es un procedimiento riguroso que permite transformar coordenadas medidas en dos sistemas diferentes de coordenadas, a partir de al menos dos puntos de control; si existe redundancia de datos es posible efectuar la transformación, aplicando procedimientos mínimo-cuadráticos.

REFERENCES

[1] Jim Frost, "Regression Analysis An Intuitive Guide for Using and Interpreting Linear Models", Statistics by Jim Publishing, Pennsylvania USA 2020.

[2] Toni Schenk, "Digital Photogrammetry", The Ohio State University, Marcombo editors, 2002.

[3] Paul R. Wolf, "Elements of Photogrammetry", McGraw Hill, 1983.

Biografía Autor

Valenti Garcia Carlos, nació en la ciudad de La Paz – Bolivia. Es economista graduado de la Universidad Mayor de San Andrés. Tiene una maestría en Educación Superior de la Escuela Militar de Ingeniería. Es docente de la Escuela Militar de Ingeniería.

Fecha de Envió del Articulo: La Paz, 30 de octubre de 2022
Fecha de Recepción de artículo: La Paz, 30 de octubre de 2022