Un recorrido a la Variable Compleja

Lic. Ana Rosa Aliendre Tapia
Carrera de Ingeniería de Sistemas, Escuela Militar de Ingeniera
La Paz, Bolivia
rosita.aliendre@gmail.com

A tour of the Complex Variable

Resumen – En el transcurso de la historia matemática, fue proporcionando soluciones e interpretaciones al comportamiento del hombre racional, de esta forma se procede a comprender fenómenos como las raíces negativas, se observó que los números imaginarios eran indispensables para la solución de ecuaciones del tipo $x^2+c = 0$, donde c en un número positivo. Newton, Bomberil, Euler entre otros llegaron a comprender este fenómeno que hoy en día lo conocemos con la teoría de funciones de Variables complejas, estas son esenciales en aplicaciones concretas en varias áreas de ingeniería y ciencias como el proceso de señales, la teoría del control, electromagnetismo, análisis de vibraciones, mecánica actuantica entre otras.

Palabras Claves— Imaginario, Número Complejo, Teorema de Moivre, Función de Variable compleja, limites conplejFunción analítica

Abstract - In the course of mathematical history, it was providing solutions and interpretations to the behavior of the rational man, in this way we proceed to understand phenomena such as negative roots, it was observed that imaginary numbers were essential for the solution of equations of the type $x^2+c = 0$, where c is a positive number. Newton, Bomberil, Euler among others came to understand this phenomenon that we know today with the theory of functions of complex variables, these are essential in specific applications in various areas of engineering and science such as signal processing, control theory, electromagnetism, vibration analysis, actuantica mechanics among others.

Keywords *Imaginary, Complex Number, Moivre's Theorem, Complex Variable Function, Complex LimitsAnalytical Function.*

I. INTRODUCCION

En este documento daremos un recorrido al mundo mágico de los números complejos a pesar de una estructura llamativa es poco estudiado en su integridad; El poder de calculo que se esconde detrás de los complejos, con un mínimo de esfuerzo, podemos derivar identidades y formulas trigonométricas que requieren de un trabajo, siguiendo los métodos usuales. Muchos conceptos de la matemática, como el de función, limites, series de potencias y continuidad se estudian de manera bastante natural dentro del ambiente de los números complejos. Los argumentos de prueba son mucho más intuitivos y transparentes en el plano.

En el presente artículo se tratan los aspectos más importantes de los números complejos, pueden ser comprendidos por persona con los conocimientos básicos, Los aspectos históricos del tema, que aparecen son fundamentales para cualquier desarrollo didáctico.
La exposición se dan todos los conceptos necesarios para la comprensión de la prueba, sin necesidad de recurrir a textos avanzados de análisis o de topología.

II. DESARROLLO

A. Origen de los números complejos

La primera mención de la que se conoce de personas tratando de usar números imaginarios se da en el primer siglo. Alrededor del 50 AC, Heron de Alejandría estudio el volumen de una sección imposible de una pirámide. Recordemos que los griegos rechazaron el uso de los números negativos, por la falta de un equivalente dentro de la geometría. Para ellos, todo número representaba la longitud de un segmento o el área de una figura plana.
Girolamo Cardano, matemático italiano del siglo XVI, el primero en reconocer la verdadera importancia de las raíces negativas.
Rafael Bombelli, también italiano, continuó los estudios de Cardano y, en una obra publicada señaló que los números imaginarios eran indispensables para la solución de ecuaciones.

En 1777, el matemático suizo Leonhard Euler introdujo el símbolo i para representar la unidad imaginaria. La existencia de números complejos no fue completamente aceptada hasta la más abajo mencionada interpretación geométrica que fue descrita por Wessel en 1799, redescubierta algunos años después y popularizada por Gauss. La implementación más formal, con pares de números reales fue dada en el Siglo XIX.

B. Números complejos

Se denomina número complejo a un par ordenado de números reales

$$z = (x, y) \text{ ó } z = x + iy \text{ donde } i = \sqrt{-1}.$$

Esta forma de representar un número complejo se denomina forma cartesiana o binómica; Al conjunto de los números complejos se denotará de la siguiente forma:

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

La parte real de un número complejo es la primera componente del par ordenado y la parte imaginaria es su segundo componente, luego tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales y se denotan por:

$$\mathbb{R}e(z) = x \;\; y \;\; \mathbb{I}m(z) = y$$

La forma trigonométrica o polar de un Número Complejo: Está basada en coordenadas polares, tomando a la parte real e imaginaria como las componentes de un vector (par ordenado).

$$z = r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

La forma exponencial es representada por:

$$z = r\,e^{i\theta}$$

C. Teorema de Moivre

Describe una fórmula para determinar potencias de un numero complejo:

$z^n = (r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta))^n = r^n\,(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta))$

Atreves del teorema podemos desarrollar una fórmula para determinar raíces positivas; Si $z = r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ es un número complejo diferente de cero y si n es un entero positivo, entonces Z tiene exactamente n raíces diferentes que se puede expresar en radianes o en grados.

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right)$$

D. Funciones de variable compleja

Si z representa a cualquier elemento del conjunto de los números complejos, entonces se le llama variable compleja; Si a cada valor que puede tomar la variable compleja z le corresponde un único valor de una variable compleja w, decimos que w es una función de z, es decir: f(z) = w. Así, a la variable z se la denomina variable independiente, mientras que a w se la denomina variable dependiente.

Por tanto, la función f(z) es equivalente a un par de funciones reales **u(x,y)** y **v(x,y)** cada una dependiente de los valores x e y.

Observemos las funciones elementales

1) Función de polinomios: Los polinomios complejos son funciones de la forma

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$$

La parte real e imaginaria de una función polinómica compleja son funciones polinómicas

2) *Funciones racionales*: descrita de la siguiente forma:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ con } Q(z) \neq 0$$

2) *Función exponencial*: La función esta defenida por $f(z) = e^z$ si $z = x + iy$:

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} \Rightarrow f(z) = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\,\mathrm{Sen}\,y)$$

3) *Función Logarítmica*: La exponencial compleja $z = r\,e^{i\theta}$ (Forma exponencial de un número complejo) es un número complejo, el valor de θ se denomina argumento principal de z y se denota por: θ =Arg (z). Para todo complejo z≠0, le corresponde solamente un valor de θ con $0 \leq \theta \leq \pi$, sin embargo, cualquier otro intervalo de longitud 2π se puede emplear. El logaritmo complejo es la inversa de la exponencial compleja, es decir:

Si z=re^iθ es un número complejo ⇒ ∃ w ∈ ℂ único tal que: $r = \|z\|$ y $\theta = \mathrm{Arg}\,(z)$ de donde se define el logaritmo como:

$$\ln z = w = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$$

El valor principal del ln r es el que se obtiene cuando $k = 0$ es decir que el valor principal de un logaritmo complejo es: $w = ln\,z = ln\,r + i\theta$

E. Limite Complejo

Se dice que la función f(z) tiene como límite w_0, cuando Z tiende a z_0, si la función toma valores cada vez más próximos a w_0 cuando z se aproxima a Z_0, expresado de la manera formal:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta > \frac{0}{0} < \|z - z_0\| < \delta$$
$$\Rightarrow \|f(z) - L\| < \varepsilon$$

F. Derivación compleja

La derivada de una función compleja de variable compleja se define exactamente de la misma manera que en el caso del campo real. Por lo cual para derivar funciones complejas se utilizarán las mismas propiedades, métodos y tablas de derivación del campo real, pero adecuando a la teoría de funciones complejas.

Si f(z) es unívoca en alguna región R del plano z la derivada de la función está definida como:

$$f'(Z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta_z) - f(z)}{\Delta_z}$$

Si el límite existe independientemente de la manera como $\Delta \boldsymbol{z} \rightarrow \boldsymbol{0}$. En tal caso decimos que f(z) es diferenciable en z.

G. Regla de L´Hopital

Sean $\boldsymbol{f(z)}$ *y* $\boldsymbol{g(z)}$ analíticas en una región que contiene al punto $\boldsymbol{z0}$ y supongamos que $\boldsymbol{f(z0)} = \boldsymbol{g(z0)} = \boldsymbol{0}$ *pero*: $\boldsymbol{g'(z0)} \neq \boldsymbol{0}$. Entonces la regla de L'Hôpital establece que:

$$\lim_{z \to z0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

III. HOLOMORFA

Son el principal objeto de estudio del análisis complejo; son funciones que se definen sobre un subconjunto del plano complejo y con valores en C, se dice que es holomorfa en su dominio. Esta condición es mucho más fuerte que la diferenciabilidad en caso real e implica que la función es infinitamente diferenciable y que puede ser descrita mediante su serie de Taylor.

A. Función analítica

La $\boldsymbol{f(z)}$ de la variable compleja es analítica en un punto z_0 si la derivada $\boldsymbol{f'(z)}$ existe en todo punto z de una región R, entonces diremos que $\boldsymbol{f(z)}$ es analítica en R.

Si $\boldsymbol{f(z)} = \boldsymbol{(x, y)= u(x,y) +i\ v(x,y)}$ una función analítica en alguna región R en el plano z, entonces las dos ecuaciones denominadas Ecuaciones de Cauchy Riemann deben cumplirse.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

B. Función armónica

Se dice que una función es armónica se verifica el Laplaciano, con variables complejas, entonces si las segundas derivadas parciales de u y v con respecto de x e y existen.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

IV. CONCLUSIÓN

Queda propuesto dar un recorrido y profundizar los conceptos del plano complejo, se observa que las nociones holomorfas son esenciales para trabajar con aplicaciones ya sean mencionadas las transformaciones complejas, considerándose que esto se percibe con más facilidad para los usuarios de las matemáticas omitiendo el lenguaje abstracto y utilizando los pasos técnicos para una buena comprensión que lleva a afrontar retos prácticos y a manejar nociones con caculos en variable compleja. Además, en el marco del comportamiento de la vida cotidiana muchas veces no se observa una cantidad imaginaria o compleja, pues estas cuantias pueden comportarse tan ínfimas en un espacio, así como demasiado grandes.

REFERENCES

[1] Brawn, J. W & Churchill, R, "Variable compleja y aplicaciones," McGraw Hill, 2010

[2] Espinoza Ramos, Eduardo, "Variable Compleja," E.I.R.L. Editorial EdukPeru, Febrero 2008

[3] Murray R. Spieguel, "Variable compleja," McGraw Hill, 2015

Biografía Autor

Docente de grado de Ingeniería de Sistemas, Lic. Ana Rosa Aliendre T. Titulada en la ciudad de La Paz – Bolivia de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA) – Facultad de Ciencias Puras Naturales del Área de Estadística con Diplomado en Educación Superior basado en competencias en la ciudad de Cochabamba – Bolivia, Universidad Mayos de San Simón (UMSS) con cursos en administración de empresa y la Norma ISO. Con experiencia laboral en el Gobierno Autónomo Municipal de La Paz y parte de la Escuela Militar de Ingeniería desde la gestión 2020.

Fecha de Envió del Articulo: La Paz, 30 de octubre de 2022

Fecha de Recepción de artículo: La Paz, 30 de octubre de 2022