Articulo Original Páginas: 1-4 ISSN
Paradigma Volumen XXI Septiembre 2020

Herramientas De Enseñanza En Robótica: El Problema De La Cinemática Inversa

Eddy Orlando Mier Cornejo
Carrera de Ingeniería de Mecatrónica, Escuela Militar de Ingenieria
La Paz, Bolivia
eddyomc@gmail.com,

Robotics Teaching Tools: The Inverse Kinematics Problem

Resumen— El presente trabajo tiene por objetivo presentar una herramienta didáctica de enseñanza que permita el alcance de las competencias de análisis, desarrollo e implementación de soluciones de cinemática inversa a robots manipuladores.
Palabras Claves— Herramienta didáctica de enseñanza, Cinemática inversa, Matrices de transformación , Algoritmo Denavit _ Hartenberg (DH)

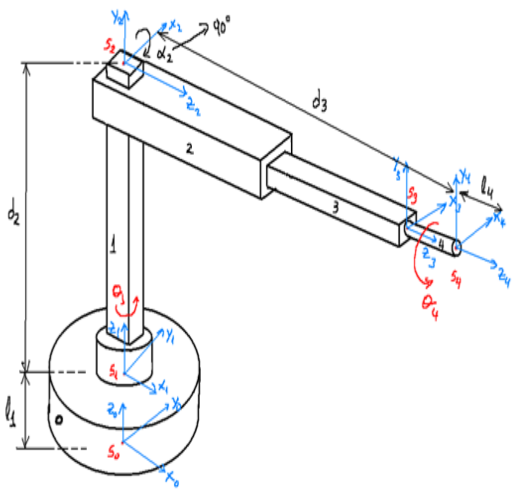
I. INTRODUCCIÓN

La cinemática del robot estudia el movimiento de este con respecto a un sistema de referencia.
La función de la cinemática es la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición y la orientación del extremo final del robot con los valores que toman sus coordenadas articulares.
Existen dos problemas fundamentales en la cinemática del robot.
Problema cinemático directo: consiste en la determinar la posición y orientación del extremo final del robot, con respecto a un sistema de referencia, conocidos los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot.
Problema cinemático inverso: consiste en determinar la configuración que debe adoptar el robot para una posición y orientación del extremo del robot conocidos.
Mediante la cinemática del robot, se deben encontrar las relaciones entre las velocidades del movimiento de las articulaciones y las del extremo. Esta relación viene dada por el modelo diferencial mediante la matriz Jacobiana.

II. PROCEDIMIENTO

Problema Cinemático Directo.

Si los valores de las variables articulares, pueden ser leídos directamente de los correspondientes sensores por la unidad de control del robot.
El modelo cinemático directo podrá utilizar estos valores para presentar información relativa a la localización del extremo del robot.
Algoritmo de Denavit _ Hartenberg, para la obtención del modelo cinemático directo:
Este método matricial establece la localización que debe tomar cada sistema de coordenadas, ligado a cada eslabón (i) de una cadena articulada.
El método consiste en las transformaciones básicas de una sucesión de rotaciones y traslaciones que permiten relacionar el sistema de referencia del elemento “i-1” con el sistema del elemento “i”. Dependiendo de las características geométricas de cada eslabón.
Consideremos el siguiente eslabón, donde el eje Z, se debe ubicar en dirección del eje de la articulación.
Ejemplo nro.1: brazo robótico tipo scara:



Obteniendo sus parámetros DH tendremos:
Articulación

articulación	θ_i	d_i	a	α
1	θ_1	l_1	0	0º
2	90º	d_2	0	90º
3	0º	d_3	0	0º
4	θ_4	l_4	0	0º

Donde sus matrices de transformación son:

$$ {}^0_1A = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; $$

$$ {}^1_2A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^2_3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; $$

$$ {}^3_4A = \begin{bmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & 0 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Y la matriz de transformada que relaciona el sistema base con el sistema del extremo del robot será:

$$ = \begin{bmatrix} -S\theta_1 C\theta_4 & S\theta_1 C\theta_4 & C\theta_1 & (l_4+d_3)C\theta_1 \\ C\theta_1 C\theta_4 & -C\theta_1 S\theta_4 & S\theta_1 & (l_4+d_3)S\theta_1 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & l_1+d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Podemos concluir que las coordenadas x, y, z en función de los eslabones y articulaciones están representados en la 4ta columna.
Problema Cinemático Inverso.
Este problema consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot, para que el extremo se posicione y oriente en una determinada localización espacial (noap).
El método de análisis se vuelve complejo a medida que aumentan los grados de libertad por lo que requiere de una herramienta matemática de ayuda (MATLAB).

$$ -n^T P = -(n_x \quad n_y \quad n_z) \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} $$
$$ = -(n_x P_x \quad n_y P_y \quad n_z P_z) $$
$$ q_1 = \theta_1 \rightarrow C\theta_1 = Cq_1 = C_1 $$
$$ S\theta_1 = Sq_1 = S_1 $$

$$ {}^0_1A = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow ({}^0_1A)^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

El procedimiento de obtención de las ecuaciones depende de la configuración del robot. Siendo adecuado encontrar una solución cerrada, es decir, una relación matemática explicita, de la forma:
Este método es útil cuando los robots deben realizar el seguimiento de una determinada trayectoria, en tal caso la
solución del problema cinemático inverso debe resolverse en tiempo real.
Con frecuencia, se generan varias soluciones al problema cinemático inverso. Con una solución cerrada, donde determinadas reglas o restricciones aseguran la solución más adecuada entre las posibles (por ejemplo, los limites en los recorridos articulares).
Este método es útil cuando los robots deben realizar el seguimiento de una determinada trayectoria, en tal caso la solución del problema cinemático inverso debe resolverse en tiempo real.
Una alternativa para resolver el problema es recurrir a manipular las ecuaciones correspondientes al problema cinemático directo y establecer la siguiente relación:
Sabiendo que:

$$ T = {}^0_1A * {}^1_2A * {}^2_3A * {}^3_4A $$
$$ ({}^0_1A)^{-1} * T = {}^1_2A * {}^2_3A * {}^3_4A $$
$$ ({}^1_2A)^{-1} * ({}^0_1A)^{-1} * T = {}^2_3A * {}^3_4A $$
$$ ({}^2_3A)^{-1} * ({}^1_2A)^{-1} * ({}^0_1A)^{-1} * T = {}^3_4A $$

Puesto que T=(noap) es conocida, debido a que se conocen el extremo del robot. En las expresiones i, ii, iii los miembros a la izquierda de T, están en función de la variables articulares (q_1, q_2, …, q_k) y los miembros a la derecha son las variables articulares (q_(k+1), …., q_n).

La expresión i) tendrá la variable q_1= θ_1 y será aislado del resto de las variables articulares, una vez obtenida q_1, mediante la expresión ii) se puede obtener la variable q_2 〖=d〗_2y así sucesivamente hasta que conocida las variables q_1, q_2, q_3 〖=d〗_3se puede obtener de la expresión iii) la variable q_4 〖=θ〗_4.

Para aplicar este método es necesario obtener las inversas de las matrices i-1Ai. Sabemos que:

$$noap = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_x & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[noap]^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_x & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & -n^T P_x \\ n_y & o_x & a_y & -o^T P_y \\ n_z & o_z & a_z & -a^T P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reemplazando en i-1Ai, se tiene que:
Por lo tanto, utilizando la expresión
Luego:

$$q_2 = d_2 \quad \rightarrow$$

$$({}^1_2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q_3 = d_3 \quad \rightarrow$$

$$({}^2_3A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i. $({}^0_1A)^{-1}T = {}^1_2A\,{}^2_3A\,{}^3_4A \rightarrow T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_x & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_x & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & 0 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & 0 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 + q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & l_4 + q_3 \\ C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & \mathbf{0} \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} n_xC_1 + n_yS_1 & o_xC_1 + o_yS_1 & a_xC_1 + a_yS_1 & P_xC_1 + P_yS_1 \\ -n_xS_1 + n_yC_1 & -o_xS_1 + o_yC_1 & -a_xS_1 + a_yC_1 & \boldsymbol{-P_xS_1 + P_yC_1} \\ n_z & o_z & a_z & P_z - l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-P_xS_1 + P_yC_1 = 0 \;\rightarrow\; \frac{S_1}{C_1} = \frac{P_y}{P_x} \;\rightarrow\; \frac{\sin(q_1)}{\cos(q_1)} = \frac{P_y}{P_x}$$

Demanera que se obtiene las respectivas formulas que determinan la relacion entre las coordenas espaciales y las rotaciones angulares

$$\tan(q_1) = \frac{P_y}{P_x} \;\rightarrow\; \boldsymbol{q_1 = \tan^{-1}\left(\frac{P_y}{P_x}\right)}$$

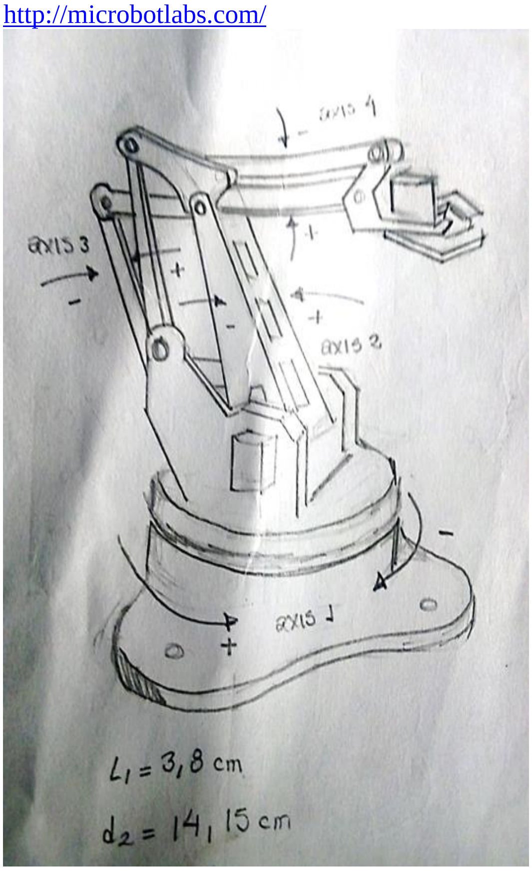
De estas 12 expresiones debemos escoger aquella que nos permita dejar a q1, en función de las constantes, pero no en función de las otras variables articulares (q2, q3 o q4).
Se realizamos lo mismo para el resto de las articulaciones obtenemos:

$$\rightarrow P_z - l_1 - q_2 = 0 \;\rightarrow\; \boldsymbol{q_2 = P_z - l_1}$$

$$\rightarrow S_4 = n_z \;\wedge\; C_4 = o_z \;\rightarrow\; \boldsymbol{q_4 = \tan^{-1}\left(\frac{n_z}{o_z}\right)}$$

III. IMPLEMENTACIÓN Y VALIDACION

Para determinar si un estudiante regular alcanza la competencia trabajamos con el brazo robótico cuyas partes fueron desarrolladas en una impresora 3d, donde las articulaciones con grado de libertad se representan a partir de servomotores.
El modelo se obtuvo de la página web siguiente: http://microbotlabs.com/



La imagen muestra al manipulador robótico con 3 grados de libertad mas un efector final con un grado de libertad, que en su conjunto llego a costar en promedio Bs. 250, lo cual lo hace accesible a estudiantes y al proyecto en sí.
Se armo un conjunto de brazos manipuladores para el análisis de la cinemática inversa. Los cuales se entregan a los estudiantes de la materia de robótica, con la tarea de que se encuentre los parámetros DH, se calcule las matrices de transformación para la solución directa y se encuentre las respectivas soluciones formuladas de cinemática inversas y como punto final el desarrollo de una interfaz de aplicación práctica.
Se escogió el trabajo de uno de los estudiantes que arrojo los siguientes análisis:
El primer resultado de análisis refleja los parámetros DH:

ARTICULACION	$\boldsymbol{\theta_i}$	$\boldsymbol{d_i}$	$\boldsymbol{a_i}$	$\boldsymbol{\alpha_i}$

1	θ_1	6.8	0	0
2	90	9.3	0	90
3	0	0	0	α_2
4	0	7.7	0	α_3

Tres articulaciones con grados de libertad sin contar al efector final.
El segundo resultado de las matrices de transformación arroja lo siguiente:
Rotación en el eje Z para la articulación Nro. 1

$$
{}^0_1A = \begin{bmatrix} cos(\theta_1) & -sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ sin(\theta_1) & cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Rotación en el eje X y Z para la articulación

$$
{}^1_2A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Rotación en X para la tercera articulación

$$
{}^2_3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha_2) & -sin(\alpha_2) & 0 \\ 0 & sin(\alpha_2) & cos(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Rotación en X para la cuarta articulación

$$
{}^3_4A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha_3) & -sin(\alpha_3) & 0 \\ 0 & sin(\alpha_3) & cos(\alpha_3) & 7.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

La solución a la cinemática directa dio:

$$
T = {}^0_1A * {}^1_2A * {}^2_3A * {}^3_4A
$$

$$
T = \begin{bmatrix} -sin(\theta_1) & sin(\alpha_2+\alpha_3)\cos(\theta_1) & cos(\alpha_2+\alpha_3)\cos(\theta_1) & \frac{\cos(\theta_1)(77cos(\alpha_2))}{10} \\ cos(\theta_1) & sin(\alpha_2+\alpha_3)\sin(\theta_1) & cos(\alpha_2+\alpha_3)\sin(\theta_1) & \frac{\sin(\theta_1)(77cos(\alpha_2))}{10} \\ 0 & cos(\alpha_2+\alpha_3) & -sin(\alpha_2+\alpha_3) & \frac{161}{10}-\frac{77sin(\alpha_2)}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Para la solución al problema de la cinemática inversa el estudiante utilizo la herramienta matemática del MATLAB, a partir del cual encontró las siguientes soluciones:

$$
pycos(\theta) - pxsin(\theta) = 0
$$

$$
pycos(\theta) = pxsin(\theta)
$$

$$
\frac{py}{px} = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)}
$$

$$
\theta = \tan^{-1}\left(\frac{py}{px}\right)
$$

$$
pz - \frac{161}{10} = -\frac{77\sin(\alpha 2)}{10}
$$

$$
161 - 10pz = 77\sin(\alpha 2)
$$

$$
\frac{161-10pz}{77} = \sin(\alpha 2)
$$

$$
\alpha 2 = \sin^{-1}\left(\frac{161-10pz}{77}\right)
$$

$$
\cos(\alpha 3)\,[\sin(2\alpha 2)] = -\sin(\alpha_3)\,[\cos(2\alpha 2) - 1]
$$

$$
-\frac{[\sin(2\alpha 2)]}{[\cos(2\alpha 2) - 1]} = \frac{\sin(\alpha 3)}{\cos(\alpha 3)}
$$

$$
\alpha 3 = \tan^{-1}\left(-\frac{[\sin(2\alpha 2)]}{[\cos(2\alpha 2) - 1]}\right)
$$

Donde se muestran los grados de libertad angular en función de las coordenadas espaciales.
Para validar la aplicación se pidió al estudiante elegido que nos presente dos videos el primero con el proceso completo de desarrollo del manipulador robótico cuyo enlace es: https://youtu.be/HOF5lN0I9X8
El segundo para una trayectoria de puntos cuyo enlace es: https://youtu.be/niLDvUkkBSI

IV. CONCLUSIÓN

A partir de la presentación de los videos desarrollados por diferentes estudiantes, en los cuales se describe la realización del análisis respectivo, el desarrollo de la solución al problema de la cinemática inversa y prueba de funcionamiento de la implementación se llega a la conclusión de que las competencias mencionadas en el objetivo de la introducción han sido alcanzadas de manera completa.

La herramienta está compuesta por un desarrollo teórico, un manipulador robótico, el uso de la herramienta del MATLAB y la interconexión con el manipulador robótico para demostrar el funcionamiento

Agradecimientos al estudiante Jonathan Rojas Mamani por la respectiva colaboración al mencionado artículo.

Referencias

[1] Fundamentos de Robótica - A. Barrientos, L. Peñin, C. Balaguer, R. Aracil
http://microbotlabs.com/
https://es.wikibooks.org/wiki/Robótica/Herramientas_matemáticas_para_la_localización_espacial
[2] MATLAB aplicado a Robotica y mecatronia – Fernando Reyes Cortez
https://www.youtube.com/watch?v=9AarFJpMsTw

Fecha de Envió del Articulo: 19/03/2020
Fecha de Aceptación de artículo: 13/04/2020