

# Introducción al modelado de sistemas físicos con Bond Graph

SENIOR

Ing. José Arturo Marín Thames.  
Carrera de Ingeniería de Sistemas electrónicos, Escuela Militar de Ingeniería  
La Paz, Bolivia  
jmarint@doc.emi.edu.bo



## Introduction to modeling physical systems with the Bond Graph

**Resumen**— El presente trabajo tiene por objetivo introducir al lector al modelado mediante bond graphs de sistemas eléctricos y mecánicos. Esta técnica permite obtener una representación matemática de un sistema dinámico en forma alternativa a los métodos de modelado utilizados en sistemas de control automáticos.

**Palabras Claves**— *Bond graph, sistemas dinámicos, modelado, control automático.*

**Abstract**— The present work aims to introduce the reader to bond graph modeling of electrical and mechanical systems. This technique allows to obtain a mathematical representation of a dynamic system in an alternative way to the modeling methods used in automatic control systems.

**Keywords**— *Bond graph, dynamic systems, modelling, automatic control.*

### I. INTRODUCCIÓN

Los Bond graphs o gráficos de enlace de energía son una representación gráfica o grafo de todos los tipos de interacción entre sistemas energéticos. En el estudio de sistemas de ingeniería complejos, es obvio que éstos sistemas sufren problemas térmicos, problemas estructurales, problemas de vibración y ruido, y problemas de control y estabilidad que no se pueden resolver desde la óptica de una sola disciplina. Los gráficos de enlace de energía o Bond graph proporcionan el vínculo mediante el cual estas diferentes disciplinas se pueden representar en un modelo de sistema general.

Como los sistemas dinámicos a ser modelados son en general complejos, es posible mediante la técnica de Bond graph realizar modelos por bloques o sub modelos. Los sub modelos de gráficos de enlace se pueden reutilizar en forma práctica, porque los modelos de gráficos de enlaces no son causales. Los sub modelos pueden verse como objetos; el modelado de gráficos de enlaces es una forma de modelado de sistemas físicos orientados a objetos. Los gráficos de enlaces fueron inventados por el profesor Henry Paynter en M.I.T. Las reglas para la implementación del modelado fueron realizadas por sus estudiantes Dean Karnopp y Ronald Rosenberg. Ellos desarrollaron los conceptos de potencia y el trazo causal,

además del primer programa de computadora que pudo interpretar la descripción de un gráfico de enlace y generar un conjunto de ecuaciones del espacio de estados. El primer paso en el modelado mediante Bond graph consiste en particionar un sistema en bloques o subsistemas teniendo como base la transferencia de potencia entre los mismos. A continuación introduciremos al método de Bond graph mediante ejemplos y corroboraremos su aplicación en diferentes áreas de la ingeniería donde se requieren modelos matemáticos de sistemas dinámicamente correctos.

### II. MATERIALES Y MÉTODOS

A continuación realizaremos una explicación resumida de los componentes de un bond graph y luego el desarrollo de dos modelos dinámicos, el primero un circuito eléctrico y el otro un sistema mecánico.

a. Enlace: Es una línea interpretada como una conexión entre subsistemas que intercambian energía. Al extremo de esta línea se encuentra una media flecha que marca la dirección en que va la energía.



Fig. 1. Enlace (bond)

b. Variables: Los componentes del bond graph se clasifican por la forma en que operan sobre la energía. Se pueden considerar dos tipos de variables:

1. Variables de potencia: Donde se utilizan la variable de esfuerzo  $e$  y de flujo  $f$ .
2. Variables de energía: Se utilizan el momento  $p$  y el desplazamiento  $q$ .

La siguiente tabla identifica las variables de energía y potencia que se presentan en sistemas mecánicos eléctricos. Se puede observar que el momento y el desplazamiento son integrales del esfuerzo y el flujo.

TABLA I

Relación de las variables en los diagramas Bond graph

VARIABLES	DOMINIO	UNIDADES
<b>SISTEMA MECÁNICO LINEAL</b>		
Esfuerzo e	Fuerza F	N
Flujo f	Velocidad v	m/s
Momento p	Momento P	N·s
Desplazamiento q	Desplazamiento x	M
<b>SISTEMA MECÁNICO ROTACIONAL</b>		
Esfuerzo e	Par T	N·m
Flujo f	Velocidad angular $\omega$	rad/s
Momento p	Momento angular p	N·m·s
Desplazamiento q	Ángulo $\theta$	rad
<b>SISTEMA ELÉCTRICO</b>		
Esfuerzo e	Voltaje V	N·m/C
Flujo f	Corriente i	C/s
Momento p	Flujo $\lambda$	V·s
Desplazamiento q	Carga q	A·s

La potencia instantánea variable en el tiempo es transmitida por un enlace particular y puede ser expresada como el producto de las variables esfuerzo (e) y flujo (f).

$$Potencia = e(t) \cdot f(t) \quad (1)$$

Además de las variables de esfuerzo y flujo se tienen los energéticos momento y desplazamiento:

$$p = \int_0^t e(t) dt \quad (2)$$

$$q = \int_0^t f(t) dt \quad (3)$$

Entre las variables descritas por las ecuaciones mencionadas anteriormente, se pueden crear relaciones más fáciles de manejar y recordar mediante lo que se conoce como Tetraedro de estado, que mostramos en la siguiente figura:

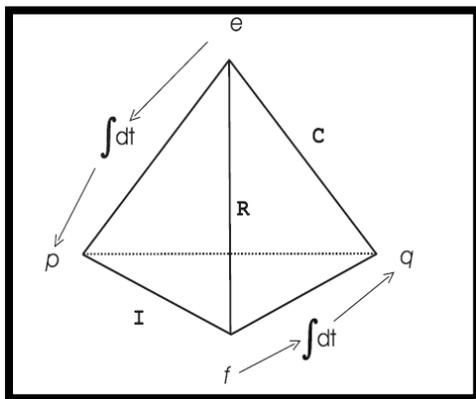


Fig. 2. Tetraedro de estado que representa la relación entre las variables del diagrama Bond graph

c. Fuentes: Son las señales generadas externamente al sistema y pueden ser de dos tipos dependiendo que la entrada sea esfuerzo o flujo.

d. Vínculos: Estos admiten varios enlaces adyacentes y representan estructuras simples como esfuerzo común y flujo común. El vínculo serie está caracterizado por el mismo flujo:

$$f_1 = f_2 = f_3 = \dots = f \quad (4)$$

En tanto que el vínculo paralelo cambia de modo que el esfuerzo es ahora el mismo:

$$e_1 = e_2 = e_3 = \dots = e \quad (5)$$

A continuación realizaremos los modelos de algunos elementos básicos de circuitos eléctricos y mecánicos. Iniciaremos con un resistor eléctrico, que tiene su similar en el amortiguador mecánico. Sabemos que al circular corriente eléctrica por un resistor se produce una caída de voltaje, su simbología mediante bond graph es el siguiente:

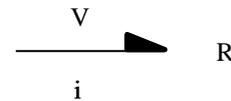


Fig. 3. Diagrama de Bond graph de un resistor

En la representación mediante Bond graph se explicará que el esfuerzo asociado a un componente resistivo es igual a R que determina el flujo asociado al grafo.

Otro elemento muy común en los sistemas mecánicos son los resortes que representan elementos que almacenan energía y la devuelvan al sistema sin ninguna pérdida. Considerando un resorte ideal sin pérdidas se tiene la ecuación:

$$E = K \cdot x \quad (6)$$

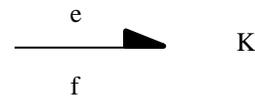


Fig. 4. Diagrama de Bond graph de un resorte

Con estos conceptos explicados vamos a desarrollar el diagrama Bond graph de un circuito eléctrico RLC y un sistema mecánico masa, resorte y amortiguador. En circuitos eléctricos las variables de los elementos del bond graph son el voltaje sobre cada puerto de cada elemento y corriente eléctrica que fluye a través del puerto del elemento. Obsérvese que un puerto es un interface de un elemento a otro elemento; este es punto de conexión de los enlaces.

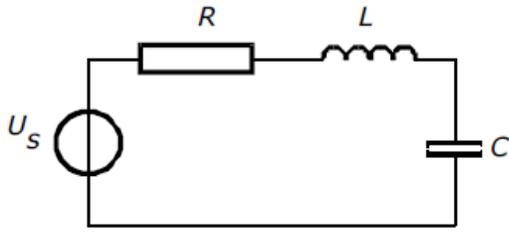


Fig. 5. Circuito eléctrico RLC

Las ecuaciones de un resistor, capacitor e inductor son las siguientes:

$$u_R = i \cdot R \quad (7)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt \quad (8)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad (9)$$

Dibujaremos a continuación los diagramas de enlace de flujo de cada elemento del circuito:

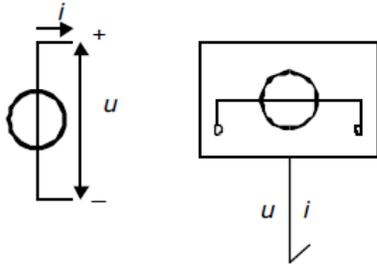


Fig. 6. Diagrama de bond graph de una fuente de alimentación

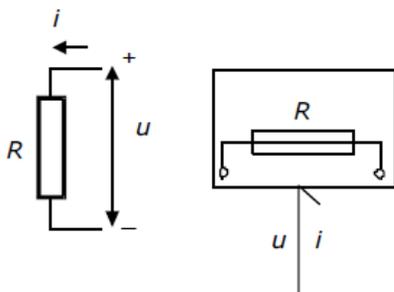


Fig. 7. Diagrama de bond graph de un resistor

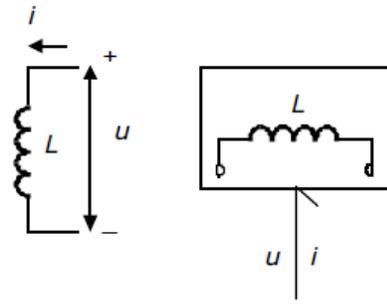


Fig. 8. Diagrama de bond graph de una bobina

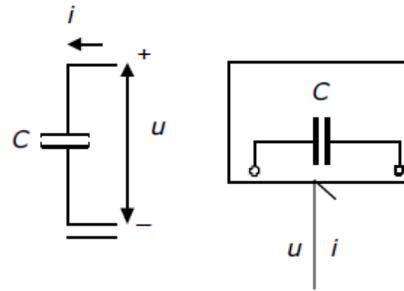


Fig. 9. Diagrama de bond graph de un capacitor

Presentaremos el diagrama de enlace de flujo con los símbolos de componentes y luego la simbología estándar que representa al mismo circuito en forma de relaciones de energía:

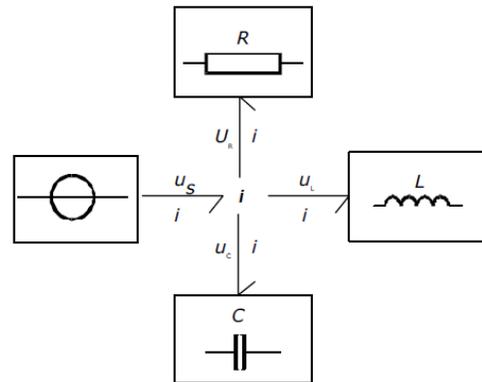
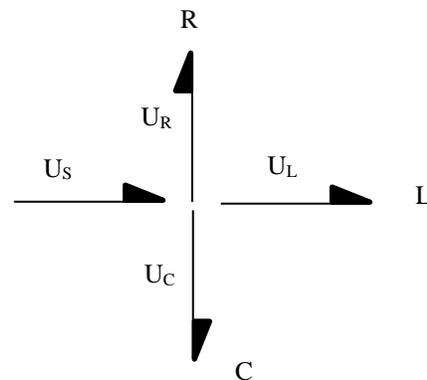


Fig. 10. Diagrama de bond graph de un circuito RLC



Reconocemos en el circuito que el voltaje en cada componente es diferente por la naturaleza del componente y la corriente es la misma en todo el circuito.

### III. RESULTADOS

Se puede comprobar mediante los conceptos explicados en el artículo que el bond graph es un método gráfico alternativo para modelar sistemas dinámicos. Podemos comprobar que los diagramas de enlace pueden ser aplicados a sistemas no lineales y de tipo híbrido. El flujo de energía a lo largo de un enlace tiene la dimensión física de potencia, siendo el producto de dos variables. En las redes eléctricas, las dos variables son voltaje y corriente. En sistemas mecánicos, los pares de variables son fuerza y velocidad de traslación y par y velocidad angular para el movimiento rotacional.

### IV. CONCLUSIONES

Se puede considerar al bond graph una forma de modelado de sistemas dinámicos alternativa, que puede tener una aplicación mayor en sistemas híbridos, por ejemplo electromecánicos o electroquímicos donde las ecuaciones son de diferente naturaleza pero mantienen las variables de flujo y esfuerzo con diferentes nombres.

Profundizando en esta técnica se pueden reducir modelos complejos haciendo el uso de los enlaces de energía donde la energía y el esfuerzo se dividen en ramas o fluyen en cascada a través de los elementos del sistema completo. A partir de la técnica Bond Graph es posible obtener ecuaciones matemáticas y simular el modelo mediante herramientas de software como MATLAB o Simulink

### REFERENCIAS

- [1] Jan F. Broenink, "Introduction to Physical Systems Modelling with Bond Graphs" University of Twente.
- [2] Stella Vallejos, Ramiro Aliendre, Modelado mediante bond graphs caso de estudio: servomecanismo 2002.
- [3] José Cesáreo Raimúndez Alvarez, Modelado de sistemas dinámicos (BOND GRAPH). 1999.
- [4] Wolfgang Borutzky, Bond graph modelling of engineering systems, Bonn Rhein Sieg University Germany
- [5] José A. Lozano Ruiz, Introducción a la técnica de Bond Graph, Universidad Politécnica de Madrid

**Fecha de Envío del Artículo: 20/01/2020**

**Fecha de Aceptación de artículo: 28/01/2020**